Spé maths - Corrections du ch. 4.

Ex Sol. D

1°) $\begin{cases} 3x + 2{,}4y + 2z = 8784 \\ 0{,}4x + 0{,}2y + 0{,}2z = 973{,}6 \\ 0{,}4x + 0{,}5y + 0{,}8z = 2174{,}8 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2{,}4 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} 8784 \\ 973{,}6 \\ 2174{,}8 \end{pmatrix}$

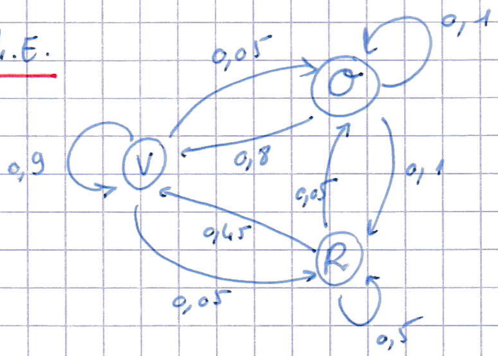
$AU = V$, donc $U = A^{-1}V$.

2°) $\det A = -0{,}156 \neq 0$

$U = A^{-1}V = \begin{pmatrix} 1248 \\ 740 \\ 1638 \end{pmatrix}$

Ex Sol. E.

1a)



1b) $M = \begin{array}{c|ccc} & V & O & R \\ \hline V & 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ O & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ R & 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}5 \end{array}$

2a) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\quad\;\; V \;\; O \;\; R$

$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}$

2b) $P_3 = P_2 \Pi = P_1 \Pi \Pi = P_1 \Pi^2 = \begin{pmatrix} \underset{V}{0{,}8725} & \underset{O}{0{,}0525} & \underset{R}{0{,}075} \end{pmatrix}$

Si le 1er feu est vert, la probabilité que le 3e feu soit vert est 0,8725.

(Calcul matriciel fait à la calculatrice).

3°) $P_1 = (0 \ 0 \ 1)$; $P_8 = P_1 \Pi^8 = \begin{pmatrix} \underset{V}{0{,}85} & \underset{O}{0{,}05} & \underset{R}{0{,}1} \end{pmatrix}$

Si le premier feu est rouge, la probabilité que le 8e feu soit :

$\begin{cases} \text{vert est } 0{,}85 \\ \text{orange est } 0{,}05 \\ \text{rouge est } 0{,}1 \end{cases}$

Ex Sol. F. Une équation de Pell-Fermat.

On cherche $x, y \in \mathbb{N}$ tels que (E) : $x^2 - 7y^2 = 1$.

1a) (E) $\Leftrightarrow x^2 = 7y^2 + 1$ où $x^2 \geq 0$ et $7y^2 + 1 \geq 0$.

$\Leftrightarrow x = \sqrt{7y^2 + 1}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$.

1b)
```
x ← 0
y ← 0
Pour y entre 0 et 1000 faire :
    x ← sqrt(7*y²+1)
    Si Ent(x) = x alors afficher (x ; y)
    Sinon afficher y et "pas de solution"
    y ← y+1
```

... C'est la solution "attendue" bien que normalement on n'écrit pas forcément ce genre de choses avec "pas".

2a) Soit $(x ; y)$ un couple-solution de (E).

Alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x + 21y \\ 3x + 8y \end{pmatrix}$

$x'^2 = (8x+21y)^2 = 64x^2 + 336xy + 441y^2$

$y'^2 = (3x+8y)^2 = 9x^2 + 48xy + 64y^2$

$7y'^2 = \quad 63x^2 + 336xy + 448y^2$

$x'^2 - 7y'^2 = \quad x^2 - 7y^2 = 1$ car (x,y) solution de (E)

Donc si $(x;y)$ est solution de (E), alors $(x';y')$ est solution de (E).

2b) $(1;0)$ est solution : $1^2 - 7\times 0^2 = 1$

$(x;y) = (1;0)$.

Pour n allant de 1 à 9 faire

| $(x;y) = \Pi(x;y)$

| Afficher $(x;y)$.

Le dernier résultat est $\Pi^9(1;0) \simeq \begin{pmatrix} 3,316.10^{10} \\ 1,253.10^{10} \end{pmatrix}$ (à la calculatrice)

Ex Sol 4 ("Pb de Bac")

1°) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(S_n \; i_n \; m_n)}_{P_n}$

2°) Pour $n=0$, $P_0 = P_0 \times \underbrace{A^0}_{\text{matrice identité } I_3}$

Supposons la pté vraie au rang n.

$P_{n+1} = P_n \times A$

$\overset{H.R.}{=} (P_0 \times A^n) \times A$

$= P_0 A^{n+1}$

Donc la pté est vraie au rang $n+1$.

3°) $P_4 = P_0 A^4$

$= \left(\frac{11}{900} \quad \frac{143}{1440} \quad \frac{6397}{7200}\right)$

$\simeq (0,01 \quad 0,0993 \quad 0,89)$

4°) La probabilité qu'un individu soit sain au bout de 4 semaines est $S_4 \simeq 0,01222 \simeq 0,01$ (env. 1%).